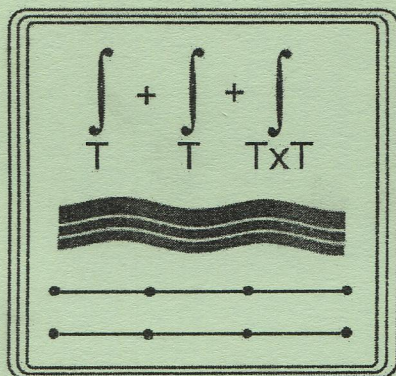


А.С. Калитвин

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
ТИПА РОМАНОВСКОГО  
С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ



**А.С. Калитвин**

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
ТИПА РОМАНОВСКОГО  
С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ**

Липецк 2007

Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — 195 с.

ISBN 978-5-88526-299-6

*Рецензенты:* кафедра высшей математики Липецкого государственного технического университета, доктор физико-математических наук, профессор В.М. Тюрин, доктор физико-математических наук, профессор Л.Н. Ляхов, Воронежская государственная технологическая академия

Книга содержит систематическое изложение теории линейных операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций и в пространствах Лебега; к частным случаям исследуемых уравнений приводится задача теории марковских цепей.

В монографии изучаются критерии и достаточные условия действия операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций, пространства и композиции таких операторов, рассматривается действие и регулярность этих операторов в пространствах Лебега и структура двойственных операторов, исследуются спектральные свойства линейных операторов типа Романовского и линейных операторов типа Романовского с частными интегралами. Установленные свойства операторов применяются к исследованию линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами, в частности, к изучению интегрального уравнения двусвязных цепей Маркова.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области функционального анализа, интегральных уравнений и их приложений.

Библиогр. 96 назв.

ISBN 978-5-88526-299-6

© А.С. Калитвин, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА I. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ</b>	<b>10</b>
1. Задача, приводящая к уравнению Романовского	10
2. Линейные операторы типа Романовского	12
3. Операторы типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций	15
3.1. Непрерывность действия операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций . . . . .	15
3.2. Достаточные условия действия . . . . .	18
3.3. Критерии действия . . . . .	23
3.4. Пространства операторов типа Романовского . . . . .	36
3.5. Композиции операторов типа Романовского . . . . .	43
4. Операторы типа Романовского с частными интегралами в пространствах Лебега	52
4.1. Непрерывность действия . . . . .	52
4.2. Регулярность операторов типа Романовского . . . . .	53
4.3. Двойственные операторы к операторам типа Романовского . . . . .	60
<b>ГЛАВА II. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ</b>	<b>69</b>
5. Спектр и части спектра одного класса операторов с частными интегралами	69
5.1. Спектр и части спектра линейного оператора . . . . .	69
5.2. Спектр, предельный, дефектный и существенный спектры . . . . .	71
5.3. Точечный спектр и собственные функции . . . . .	77
5.4. Спектральный радиус и его свойства . . . . .	83
5.5. Спектр, точечный спектр и собственные функции одного класса операторов в гильбертовых пространствах . . . . .	88
5.6. Дополнительные замечания . . . . .	93
6. Спектральные свойства линейных операторов типа Романовского	94

## ВВЕДЕНИЕ

Книга содержит основы теории линейных операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций и в пространствах Лебега. Частным случаем изучаемых уравнений является интегральное уравнение Романовского.

$$x(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma)x(\sigma, t)d\sigma + f(t, s), \quad (1)$$

к которому приводится задача теории марковских цепей с двусторонней связью.

Характерная особенность этого уравнения связана с перестановкой переменных у неизвестной функции под знаком интеграла и последующим интегрированием по одной из переменных. Уравнение (1) может быть записано в виде

$$x(t, s) = M\Pi x(t, s) + f(t, s), \quad (2)$$

где  $\Pi$  — оператор перестановки переменных, а  $M$  — частично интегральный оператор вида

$$(Mx)(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma.$$

Операторы  $M$  и  $M\Pi$  — не интегральные и не компактные даже в случае непрерывного ядра  $m(t, s, \sigma)$ . Поэтому уравнение (2) и уравнение  $x = Mx + f$  существенно отличаются от обычных интегральных уравнений. Оператор  $M$

7. Спектральные свойства некоторых классов операторов типа Романовского с частными интегралами	109
7.1. Спектр и части спектра	109
7.2. О линейном операторе двусвязных цепей Маркова	118

### ГЛАВА III. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

121

8. Линейные уравнения типа Романовского	121
9. Условия нётеровости и фредгольмовости уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций	126
9.1. Нётеровость и фредгольмовость уравнения $A\Pi x = f$	126
9.2. Нётеровость и фредгольмовость уравнения $x = A\Pi x + f$	159
9.3. Нётеровость и фредгольмовость других классов уравнений типа Романовского с частными интегралами	162
9.4. Об интегральном уравнении Романовского двусвязных цепей Маркова	166
10. Уравнения типа Романовского с частными интегралами в пространствах Лебега	169

### ЛИТЕРАТУРА

181